

Шәкір Айдос 

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

13-лекция. Вариационные методы решения краевых задач

Цель лекции – сформировать у студентов системное понимание вариационного подхода к решению краевых задач математической физики и научить применять эти методы для доказательства существования, единственности и приближённого нахождения решений.

План лекции:

1. Вариационная задача
2. Метод Ритца для простейшей краевой задачи
3. Приложение метода Ритца к решению краевой задачи Штурма – Лиувилля
4. Контрольные вопросы
5. Список литературы

1 Вариационная задача

Пусть дан функционал

$$I = I[y(x)], \quad (1.1)$$

определенный на некотором множестве $K = \{y(x)\}$. Задача об отыскании экстремумов функционала (1.1) называется **вариационной задачей**. Более точно вариационная задача ставится следующим образом: требуется найти функцию $y = \bar{y}(x) \in K$ такую, что для всех допустимых функций $y = y(x)$, достаточно близких к функции $\bar{y}(x)$, имеет место неравенство

$$I[y] \geq I[\bar{y}],$$

в случае минимума, или неравенство

$$I[y] \leq I[\bar{y}],$$

в случае максимума. При этом расстояние между функциями y и \bar{y} можно понимать по-разному.

Пример. Рассмотрим задачу: среди гладких кривых $y = y(x)$, проходящих через точки $M(a, A)$ и $N(b, B)$, найти линию с наименьшей длиной дуги (рисунок 1).

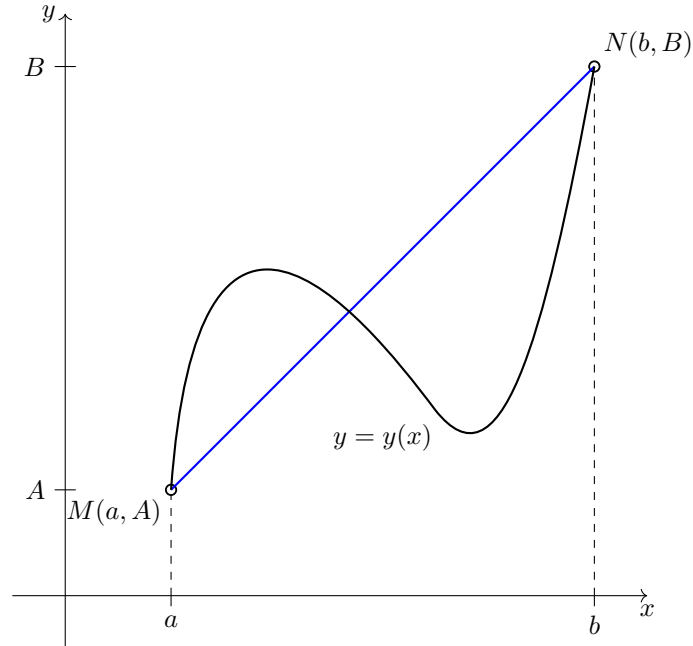


Рис. 1: Кривая наименьшей длины — прямая, соединяющая точки $M(a, A)$ и $N(b, B)$.

Задача сводится к нахождению минимума функционала

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

для кривых $y = y(x)$, принадлежащих классу $C^{(1)}[a, b]$ и таких, что $y(a) = A$ и $y(b) = B$. Из геометрических соображений очевидно, что искомым решением будет прямая

$$\bar{y} = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a),$$

причем

$$s_{\min} = \sqrt{(b - a)^2 + (B - A)^2}.$$

2 Метод Ритца для простейшей краевой задачи

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx} [p(x)y'] + q(x)y = f(x) \tag{2.1}$$

с простейшими краевыми условиями

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad (2.2)$$

где $p(x), q(x), f(x) \in C[a, b]$, причем $p(x) > 0$ при $a \leq x \leq b$. Краевая задача (2.1)–(2.2) при известных условиях эквивалентна вариационной задаче для функционала

$$F[y] = \int_a^b [p(x)(y')^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y] dx \quad (2.3)$$

на множестве функций $y \in C^{(1)}[a, b]$, удовлетворяющих краевым условиям (2.2).

Для решения вариационной задачи (2.3)–(2.2) применим метод Ритца. Выберем систему линейно независимых функций (координатные функции) $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ таких, что $u_0(a) = A, u_0(b) = B$, а остальные функции $u_i(x)$ ($i > 0$) удовлетворяют однородным краевым условиям, т. е. $u_i(a) = u_i(b) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Решение вариационной задачи будем искать в виде линейной комбинации

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x), \quad (2.4)$$

где c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — некоторые постоянные. Очевидно, функция, определенная равенством (2.4), удовлетворяет заданным краевым условиям, т. е. $y(a) = A, y(b) = B$. Коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_n подберем так, чтобы функция $y(x)$ давала экстремум функционалу (2.3). Подставляя выражение (2.4) в формулу (2.3), получаем

$$F[y] = \int_a^b \left\{ p(x) \left[u_0'(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i'(x) \right]^2 - q(x) \left[u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \right]^2 + 2f(x) \left[u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \right] \right\} dx \\ \equiv \psi(c_1, c_2, \dots, c_n),$$

где $\Psi(c_1, c_2, \dots, c_n)$ — квадратичная функция переменных c_1, c_2, \dots, c_n . Как известно, для того чтобы дифференцируемая функция $\Psi(c_1, c_2, \dots, c_n)$ при некоторых значениях c_1, c_2, \dots, c_n имела экстремум, необходимо соблюдение для этих значений следующих условий:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial c_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial c_n} = 0. \quad (2.5)$$

Система (2.5) является линейной относительно искомых коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_n , причем число уравнений равно числу неизвестных. Составив систему (2.5) и решив ее, если это возможно, найдем коэффициенты c_i ($i = 1, 2, \dots, n$), после чего решение вариационной задачи, а следовательно, и решение исходной краевой задачи дается формулой (2.4). В этом и состоит формальный аспект метода Ритца для краевой задачи (2.1)–(2.2). Оценка погрешности этого метода представляет собой относительно трудную задачу [3], и разбирать ее здесь не будем. Заметим только, что точность решения в

большой степени зависит от удачного подбора координатных функций, и, вообще говоря, возрастает с увеличением их числа.

Пример. Найти решение уравнения [1]

$$y'' + (1 + x^2)y' + 1 = 0,$$

удовлетворяющее краевым условиям $y(-1) = y(1) = 0$.

Решение. За систему координатных функций $\{u_i(x)\}$ принимаем полиномы, расположенные по степеням x^2 , удовлетворяющие однородным краевым условиям:

$$u_0(x) = 0, \quad u_1(x) = 1 - x^2, \quad u_2(x) = 1 - x^4, \dots, \quad u_n(x) = 1 - x^{2n}.$$

Для простоты выкладок возьмем лишь три координатные функции, т. е. будем искать функцию $y = y(x)$ в виде суммы

$$y = c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4). \quad (2.6)$$

Данное уравнение, где $p(x) = 1$, $q(x) = 1 + x^2$, $f(x) = -1$, очевидно, является самосопряженным. Составляем для него соответствующий функционал

$$F[y] = \int_{-1}^1 [y'^2 - (1 + x^2)y^2 - 2y] dx.$$

Заменяя y его выражением (2.6), получаем

$$F[y] = \int_{-1}^1 \{(2c_1x + 4c_2x^3)^2 - (1 + x^2)[c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4)]\} dx.$$

Частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial c_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial c_2}$$

можно найти дифференцированием интеграла $F[y]$ по параметрам c_1 и c_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial c_1} &= \int_{-1}^1 \{4x(2c_1x + 4c_2x^3) - (1 + x^2) \cdot 2(1 - x^2)[c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4)] - 2(1 - x^2)\} dx = \\ &= 8 \left(\frac{38}{105}c_1 + \frac{4}{9}c_2 - \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial c_2} &= \int_{-1}^1 \{8x^3(2c_1x + 4c_2x^3) - 2(1 + x^2)(1 - x^4)[c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4)] - 2(1 - x^4)\} dx = \\ &= 8 \left(\frac{4}{9}c_1 + \frac{2488}{3645}c_2 - \frac{2}{5} \right). \end{aligned}$$

Приравнявая эти производные нулю, получаем систему уравнений

$$\frac{38}{105}c_1 + \frac{4}{9}c_2 = \frac{1}{3}, \quad \frac{4}{9}c_1 + \frac{2488}{3645}c_2 = \frac{2}{5},$$

откуда находим, что $c_1 = 0.988$, $c_2 = -0.054$. Подставляя найденные значения c_1 и c_2 в формулу (2.6), получаем приближенное выражение для искомого решения:

$$y = 0.934 - 0.988x^2 + 0.054x^4.$$

3 Приложение метода Ритца к решению краевой задачи Штурма—Лиувилля

Рассмотрим однородное самосопряженное дифференциальное уравнение

$$[p(x)y']' + [q(x) + \lambda\rho(x)]y = 0 \tag{3.1}$$

с однородными краевыми условиями

$$\alpha_0y(a) + \alpha_1y'(a) = 0, \quad \beta_0y(b) + \beta_1y'(b) = 0, \tag{3.2}$$

где $p(x) > 0$, $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$, $p(x), q(x), \rho(x)$ — непрерывные функции и λ — параметр. Очевидно, функция $y \equiv 0$ есть решение дифференциального уравнения (3.1), удовлетворяющее краевым условиям (3.2). Однако обычно представляют интерес нетривиальные решения краевой задачи (3.1)—(3.2). Отыскание нетривиальных решений дифференциального уравнения (3.1), удовлетворяющих однородным краевым условиям (3.2), называется задачей Штурма — Лиувилля. С этой задачей часто приходится иметь дело в уравнениях математической физики. Те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи (3.1)—(3.2), называются **собственными значениями** или **собственными числами** задачи Штурма — Лиувилля, а соответствующие им нетривиальные решения — **собственными функциями** или **собственными решениями** задачи этой задачи. Ограничимся рассмотрением уравнения (3.1) при простейших однородных краевых условиях

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \tag{3.3}$$

Покажем, как, используя метод Ритца, можно приближенно решить соответствующую задачу Штурма — Лиувилля. Для этого, как указано в разделе 2, для уравнения (3.1) построим соответствующий функционал

$$F[y] = \int_a^b \{p(x)(y'')^2 - [q(x) + \lambda\rho(x)](y')^2\} dx. \tag{3.4}$$

Будем искать функцию $y = y(x, \lambda)$, дающую экстремум этому функционалу и такую, что $y(a, \lambda) = 0$, $y(b, \lambda) = 0$. Те значения параметра λ , при которых наша вариационная задача имеет нетривиальные

решения, при известных условиях являются искомыми собственными значениями рассматриваемой задачи Штурма — Лиувилля. Искомую функцию y приближенно представим в виде линейной комбинации координатных функций

$$y = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x), \quad (3.5)$$

где $u_i(a) = u_i(b) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Ввиду однородности задачи полагаем $u_0(x) \equiv 0$. Подставив выражение (3.5) в интеграл (3.4) и произведя соответствующие выкладки, будем иметь

$$F[y] = \psi(c_1, c_2, \dots, c_n, \lambda),$$

где ψ — квадратичная форма (линейная однородная функция второй степени) от переменных c_1, c_2, \dots, c_n . Коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_n находим, используя необходимые условия для экстремума функции ψ . Это дает нам линейную однородную систему

$$\frac{\partial \psi}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial c_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \psi}{\partial c_n} = 0. \quad (3.6)$$

Как известно, для того чтобы однородная система (3.6) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель ее $\Delta(\lambda)$, очевидно, зависящий от параметра λ , был равен нулю. Таким образом, для определения собственных значений получаем алгебраическое уравнение n -й степени

$$\Delta(\lambda) = 0, \quad (3.7)$$

которое называется характеристическим уравнением или уравнением частот задачи Штурма — Лиувилля. Решив характеристическое уравнение (3.7), находим первые n собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Для определения коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_n следует каждое из полученных собственных значений λ_i подставить в систему (3.6) и найти соответствующие нетривиальные решения этой системы. Собственные функции $y = y(x, \lambda_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) определяются из формулы (3.5), где коэффициенты c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) имеют найденные выше значения. Заметим, что методом Ритца можно отыскивать, разумеется приближенно, лишь конечное число собственных значений задачи Штурма — Лиувилля (как правило, такие задачи имеют бесконечное множество собственных значений), причем чем больше используется координатных функций, тем больше, вообще говоря, находим собственных значений и выше точность вычислений.

Пример. Методом Ритца определить первые два собственных значения и первые две собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для уравнения

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (3.8)$$

при краевых условиях

$$y(0) = y(1) = 0. \quad (3.9)$$

Решение. Функционал (3.4) для данного уравнения (3.8) имеет вид

$$F[y] = \int_0^1 (y'^2 - \lambda y^2) dx. \quad (3.10)$$

Учитывая краевые условия (3.9), выбираем, например, следующие координатные функции:

$$u_1(x) = x(1-x), \quad u_2(x) = x^2(1-x)$$

и соответственно полагаем

$$y = c_1(x - x^2) + c_2(x^2 - x^3), \quad (3.11)$$

где c_1 и c_2 — постоянные коэффициенты, не равные нулю одновременно ($c_1^2 + c_2^2 > 0$). Подставляя выражение (3.11) в формулу (3.10), будем иметь

$$F[y] = \int_0^1 \{ [c_1(1-2x) + c_2(2x-3x^2)]^2 - \lambda [c_1(x-x^2) + c_2(x^2-x^3)]^2 \} dx.$$

Отсюда, дифференцируя по параметрам c_1 и c_2 под знаком интеграла, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial c_1} &= \int_0^1 \{ (1-2x)[c_1(1-2x) + c_2(2x-3x^2)] - \lambda(x-x^2)[c_1(x-x^2) + c_2(x^2-x^3)] \} dx = \\ &= \left[\frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{6}c_2 \right] - \lambda \left[\frac{1}{30}c_1 + \frac{1}{60}c_2 \right], \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial c_2} &= \int_0^1 \{ (2x-3x^2)[c_1(1-2x) + c_2(2x-3x^2)] - \lambda(x^2-x^3)[c_1(x-x^2) + c_2(x^2-x^3)] \} dx = \\ &= \left[\frac{1}{6}c_1 + \frac{2}{15}c_2 \right] - \lambda \left[\frac{1}{60}c_1 + \frac{1}{105}c_2 \right]. \end{aligned}$$

Приравнивая нулю производные

$$\frac{\partial F}{\partial c_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial c_2}$$

приходим к системе

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{6}c_2 \right) \left(1 - \frac{\lambda}{10} \right) = 0, \\ \frac{1}{6}c_1 \left(1 - \frac{\lambda}{10} \right) + \frac{2}{15}c_2 \left(1 - \frac{\lambda}{14} \right) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (2c_1 + c_2) \left(1 - \frac{\lambda}{10} \right) = 0, \\ 5c_1 \left(1 - \frac{\lambda}{10} \right) + 4c_2 \left(1 - \frac{\lambda}{14} \right) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Система (3.12) имеет ненулевое решение c_1, c_2 тогда и только тогда, когда определитель ее равен нулю.

Приравняв нулю определитель системы (3.12), получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2\left(1 - \frac{\lambda}{10}\right) & 1 - \frac{\lambda}{10} \\ 5\left(1 - \frac{\lambda}{10}\right) & 4\left(1 - \frac{\lambda}{14}\right) \end{vmatrix} = 0$$

или, после упрощений,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{10}\right) \left(3 - \frac{\lambda}{14}\right) = 0. \quad (3.13)$$

Отсюда находим приближенные собственные значения задачи

$$\lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = 42. \quad (3.14)$$

Коэффициенты c_1 и c_2 определяем из системы (3.12). При $\lambda = \lambda_1 = 10$ имеем $c_1 = c, c_2 = 0$. Следовательно, первая собственная функция нашей краевой задачи в силу формулы (3.11) есть

$$y_1 \approx c(x - x^2) \quad (c \neq 0).$$

Полагая $\lambda = \lambda_2 = 42$ в системе (3.12), будем иметь

$$2c_1 + c_2 = 0, \quad 16c_1 - 8c_2 = 0;$$

отсюда $c_1 = c, c_2 = -2c$. Подставляя последние выражения в формулу (3.11), получаем вторую собственную функцию

$$y_2 \approx c(x - 3x^2 + 2x^3) \quad (c \neq 0).$$

В данном случае известно точное решение краевой задачи (3.8)–(3.9). А именно, собственные значения имеют вид $\lambda_n = n^2\pi^2$ ($n = 1, 2, \dots$), а соответствующие собственные функции определяются формулой

$$y_n = c \sin n\pi x \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $c \neq 0$. В частности, получаем $\lambda_1 = \pi^2 = 9,87$ и $\lambda_2 = 4\pi^2 = 39,48$. Таким образом, из приближенных собственных значений (3.14) первое определено примерно с относительной погрешностью 1,3%, а второе — с относительной погрешностью 6,4%.

4 Контрольные вопросы

1. В чём состоит идея метода Ритца при решении простейшей краевой задачи? Как он связан с принципом минимума функционала энергии?

2. Как осуществляется переход от дифференциальной постановки краевой задачи к вариационной (слабой) формулировке?
3. Какие требования предъявляются к базисным функциям в методе Ритца? Почему важно учитывать граничные условия?
4. Как строится аппроксимирующее решение в методе Ритца и как выводится система алгебраических уравнений для коэффициентов?
5. В чём особенности применения метода Ритца к краевой задаче Штурма–Лиувилля? Как возникает задача на собственные значения?
6. Как формулируется вариационный принцип для задачи Штурма–Лиувилля (минимизация функционала Релея)? Как интерпретируются собственные значения?
7. Как с помощью метода Ритца можно приближённо найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля? В чём заключается сходимость метода?

5 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–3].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953, гл. III и IV.
- [2] Березкин И. А. и Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 2, Физматгиз, 1959, гл. X.
- [3] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957, гл. III.